

## KOMPRESJON OG KOMPRESSORER: LIGNINGER

Jon Steinar Gudmundsson © 2010

- 7.1 Adiabatisk prosess
- 7.2 Adiabatisk og isentropisk kompresjon
- 7.3 Isotermisk kompresjon
- 7.4 Polytropisk virkningsgrad
- 7.5 Ideelle og reelle gasser
- 7.6 Varmekapasitetene til gasser
- 7.7 Optimal kompresjon

### 7.1 Adiabatisk prosess

Ingen varmeoverføring mellom kontrollvolum (system, prosess) og omgivelser

$$dQ = 0$$

Fra 1. lov

$$dU = -dW = -pdv$$

For hvilke som helst termodynamisk prosess gjelder

$$dU = C_v dT$$

slik at

$$C_v dT = -pdv$$

Fordi  $v = V/n$  kan ideelle gassloven skrives

$$pv = RT$$

Slik at

$$C_v dT = -RT \frac{dv}{v}$$

$$\frac{dT}{T} = -\frac{R}{C_v} \frac{dv}{v}$$

Vi har definisjonen

$$k = \frac{C_p}{C_v}$$

For ideelle gasser gjelder  $C_p = C_v + R$  slik at

$$k = \frac{C_v + R}{C_v} = 1 + \frac{R}{C_v}$$

eller

$$\frac{R}{C_v} = k - 1$$

Setter inn for  $R/C_v$

$$\frac{dT}{T} = -(k - 1) \ln \frac{dv}{v}$$

Ligningen kan integreres når  $k$  er konstant. Da må varmekapasitetene være konstant for også å oppfylle  $C_p - C_v = R$ . Det er ikke nok at forholdet  $C_p/C_v$  er konstant.

Integrering gir

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = -(k - 1) \ln \frac{v_2}{v_1}$$

eller

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^{k-1}$$

Fra ideelle gassloven

$$pv = RT$$

$$p_1 v_1 = RT_1$$

$$p_2 v_2 = RT_2$$

$$\frac{p_1 v_1}{T_1} = \frac{p_2 v_2}{T_2}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{p_2 T_1}{p_1 T_2}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 v_2}{p_1 v_1} = \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^{k-1}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}}$$

Fra

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^{k-1}$$

og

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}}$$

får vi

$$\left( \frac{v_1}{v_2} \right)^{k-1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}}$$

eller

$$p_1 v_1^k = p_2 v_2^k = p v^k = \text{konstant}$$

Ligningen for en adiabatisk prosess er

$$\boxed{p v^k = b}$$

hvor b er en konstant. Den oppfylder varmelærens 1. lov om bevaring av energi og følger ideelle gassloven. Prosessen kan være reversibel eller ikke reversibel. Når den er reversibel er prosessen isentropisk ( $dS=0$ , konstant entropi prosess).

## 7.2 Adiabatisk og isentropisk kompresjon

En reversible adiabatisk prosess kalles for isentropisk. Entropien definert i varmelærens 2. lov forandres ikke fra innløp til utløp.

Arbeid (samme enhet som energi) i følge varmelærens 1. lov kan skrives

$$W = \int_1^2 v dp$$

I en prosess som avgir energi (f.eks. ekspander) er arbeidet positivt mens det er negativt i en prosess som tilføres energi (f.eks. kompressor). Negativt tegn brukes ikke her fordi det er inneforstått det gjelder kompresjon.

Arbeidet  $W$  kan også finnes ved integrasjon over spesifikk volum; resultatet vil være det samme som integrasjon over trykk som vist ovenfor.

Ligningen for en isentropisk prosess er den samme som for en reversibel adiabatisk prosess

$$pv^k = b$$

hvor  $b$  er en konstant. Den kan omskrives til

$$v = \left( \frac{b}{p} \right)^{1/k}$$

Setter inn for spesifikt volum i ligningen for arbeid

$$W = \int_1^2 b^{1/k} p^{-1/k} dp$$

Differensialregning tilsier

$$dx^n = nx^{n-1} dx$$

slik at integrering gir

$$W = b^{1/k} \frac{k}{k-1} \left[ p^{\frac{k-1}{k}} \right]_{P_1}^{P_2}$$

$$p_1 v_1^k = b$$

og

$$(p_1 v_1^k)^{1/k} = b^{1/k}$$

Velger å eliminere  $v_2$  slik at

$$W = (p_1 v_1^k)^{1/k} \frac{k}{k-1} \left[ p_2^{\frac{k-1}{k}} - p_1^{\frac{k-1}{k}} \right]$$

$$= (p_1 v_1^k)^{1/k} \left( p_1^{\frac{k-1}{k}} \right) \frac{k}{k-1} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]$$

Fordi

$$p_1^{\frac{1}{k} + 1 - \frac{1}{k}} v_1^{\frac{k}{k}} = p_1 v_1$$

kan ligningen skrives

$$W = p_1 v_1 \frac{k}{k-1} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]$$

Dette er ligningen for isentropisk kompresjon av en ideell gass og gjelder for  $k \neq 1$ . Når  $k = 1$  er prosessen isotermisk (konstant temperatur).

Arbeid  $W$  ovenfor har enheten [J/mol] og spesifikt volum  $v$  har enheten [m<sup>3</sup>/mol]. For å konvertere til effekt  $P$  med enheten [W] gjelder

$$P = W \frac{m}{M}$$

og for å erstatte spesifikk volum (ideelle gassloven) gjelder

$$pv = RT$$

Effekten i isentropisk kompresjon kan dermed skrives

$$P = \frac{m}{M} RT_1 \frac{k}{k-1} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]$$

Ligningen er arbeidshesten i kompressorberegninger. Den brukes også i ekspanderberegninger.

Ovenfor har vi uttrykk for arbeid  $W$  [J/kg] og effekt  $P$  [W] i isoentropisk kompresjon. Vi trenger ett uttrykk til som brukes i kompresjon, nemlig isentropisk løftehøyde

$$h_s = \frac{W}{M}$$

med enheten [J/kg]. Vi kan skrive

$$h_s = p_1 v_1 \frac{k}{k-1} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]$$

Hvis  $k$  erstattes med den polytropiske eksponenten  $n$  uttrykker ligningen den polytropiske løftehøyden.

### 7.3 Isotermisk kompresjon

Arbeid utført på en gass komprimert fra  $p_1$  til  $p_2$  gis ved varmelæreligningen

$$W = \int_1^2 v dp$$

med enhetene  $W$  [J/mol],  $v$  [m<sup>3</sup>/mol] og  $p$  [Pa].

Spesifikt volum kommer fra ideelle gassloven

$$pV = nRT$$

$$v = \frac{V}{n}$$

$$pv = RT$$

I en isotermisk prosess er  $T_1$  og  $T_2$  like og fordi  $R$  er konstant kan det skrives

$$p_1 v_1 = p_2 v_2$$

og for kompresjon fra termodynamisk tilstand 1 til annen tilstand gjelder derfor

$$p_1 v_1 = p v$$

Ved å sette inn i arbeidsligningen resulterer

$$W = p_1 v_1 \int_1^2 \frac{1}{p} dp$$

$$W = p_1 v_1 \ln \frac{p_2}{p_1}$$

Kompresjonseffekt er gitt ved

$$P = W \frac{m}{M}$$

og dermed

$$\boxed{P = \frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{p_2}{p_1}}$$

I en isotermisk prosess er adiabatisk koeffisienten  $k = 1$ .

## 7.4 Polytropisk virkningsgrad

For en isentropisk prosess (adiabatisk og reversibel prosess) gjelder

$$p_1 v_1^k = p_2 v_2^k$$

hvor den isentropiske koeffisienten er gitt ved

$$k = \frac{C_p}{C_v}$$

Vi definerer en polytropisk prosess enkelt ved å erstatte  $k$  med  $n$  slik at

$$p_1 v_1^n = p_2 v_2^n$$

hvor  $n$  er den polytropiske koeffisienten. Vi ønsker å finne forholdet mellom  $k$  og  $n$ .

In en kompressor tilfører maskinen kinetisk energi til gassen. Fra innløp til utløp øker gassens reelle entalpi  $H$  [J/kg] i henhold til ligningen

$$H_2 - H_1 = C_p(T_2 - T_1)$$

Temperaturdifferansen kan skrives

$$T_2 - T_1 = T_1 \left( \frac{T_2}{T_1} - 1 \right)$$

For en adiabatisk prosess gjelder

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}}$$

slik at

$$T_2 - T_1 = T_1 \left( \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right)$$

For en polytropisk prosess kan vi skrive

$$T_2 - T_1 = T_1 \left( \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right)$$

For en ideell gas gjelder



$$k = \frac{C_p}{C_p - R}$$

og dermed

$$C_p = R \frac{k}{k-1}$$

Entalpidifferansen (entalpibalansen) for en polytropisk prosess kan derfor skrives

$$H_2 - H_1 = R \frac{k}{k-1} T_1 \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right]$$

Vi merker oss at ligningen inneholder både den isentropiske koeffisienten  $k$  og den polytropiske koeffisienten  $n$ .

Virkningsgrader generelt defineres som forholdet mellom ideelle effekten over reelle effekten (eller ideell spesifikk energi over reell spesifikk energi). Fordi den reelle er større enn den ideelle har virkningsgrader en verdi mindre enn én. I tilfellet kompressor er ideelle effekten den polytropiske spesifikke energien og den reelle effekten økningen i spesifikk entalpi.

Den polytropiske virkningsgraden er

$$\eta_p = \frac{h_p}{H_2 - H_1}$$

hvor  $h_p$  er den polytropiske løftehøyde gitt ved ligningen

$$h_p = p_1 v_1 \frac{n}{n-1} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right]$$

Derfor

$$\eta_p = \frac{p_1 v_1 \frac{n}{n-1} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right]}{p_1 v_1 \frac{k}{k-1} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right]}$$

og forholdet mellom  $k$  and  $n$

$$\eta_p = \frac{\frac{n}{n-1}}{\frac{k}{k-1}}$$

eller

$$\boxed{\frac{n}{n-1} = \frac{k}{k-1} \eta_p}$$

Utledningen bygger på  $k$  for en ideell gass som implisitt betyr en z-faktor på én.

## 7.5 Ideelle og reelle gasser

Empiriske observasjoner på gasser ved relative lave trykk og omgivelsestemperatur has vist flere konstante forhold. Boyle (1627-1692) viste at

$$pV = C_1$$

Gay-Lussac (1778-1850) viste konstant forhold mellom volum og absolutt temperatur

$$V = C_2T$$

Og Avagadro (1776-1856) viste av volum til gass er proporsjonal til antall mole

$$V = C_3n$$

Når vi setter disse forholdene sammen får vi

$$pV = C_4nT$$

Dermed har vi en definisjon av ideelle gasser. Hvis vi benevner  $C_4$  den universelle gasskonstanten  $R$  får vi den ideelle gassloven

$$\boxed{pV = nRT}$$

Ved ikke-ideelle forhold, f.eks. økende trykk og temperatur, begynner gassloven å gi dårligere beskrivelse av trykk-volum-temperatur oppførselen til gasser. For praktiske situasjoner definerer vi derfor den reelle gassloven

$$\boxed{pV = znRT}$$

hvor  $z$  er en korreksjonsfaktor. Faktoren kalles for kompresjonsfaktor, kompressibilitetsfaktor eller enkelt  $z$ -faktor.

Interaksjon mellom forskjellige typer gasser varierer og påvirker hvilke  $z$ -faktor vi må bruke. For ideelle gasser er  $z = 1$  mens for reelle gasser kan den være mindre eller større enn én. Tunge gasser som metan og karbondioksid har  $z < 1$  mens letter gasser som hydrogen og helium har  $z > 1$ . Ved ekstremt høye trykk og temperatur kan naturgass ha  $z > 1$ .

Alle enkelte gasser har et kritisk punkt. I et trykk-temperatur diagram benevner vi disse  $p_c$  og  $T_c$ . Det viser seg at når  $z$ -faktoren er plottet mot relativ trykk, forholdet mellom trykk og kritisk trykk, faller alle vanlige gasser på samme linje ved konstant relative absolutt temperatur. Oppdagelsen kalles for korresponderende tilstander prinsippet (eng. principle of corresponding states). Relative forholdet kalles for redusert trykk og temperatur

$$p_r = \frac{p}{p_c}$$

$$T_r = \frac{T}{T_c}$$

I litteraturen er disse relative forholdene også kalt for uekte (eng. pseudo) redusert trykk og temperatur. Relative forholdene kalles også for normaliserte forhold.

Når vi ikke har enkelte gasser men blandinger av flere gasser, f.eks. naturgass, kan vi finne ekvivalent kritisk trykk og temperatur ved enkel summering

$$p_c = \sum_i p_{ci} y_i$$

$$T_c = \sum_i T_{ci} y_i$$

hvor  $y$  står for molefraksjon. Summeringen kalles gjerne for Kays blandingsregel. Den viser seg å fungere rimelig bra for hydrokarbongasser fordi de er lite polariserte (eng. non-polar).

I olje- og gassindustrien har det vært utarbeidet diagrammer for z-faktor mot redusert trykk med linjer for konstant redusert temperatur. Flere empiriske ligninger tilpasset diagrammene finnes. Bruken av z-faktor diagrammer og ligninger har etter hvert vært blitt erstattet av programpakker hvor flere tilstandsligninger kan velges for å estimere z-faktoren.

## 7.6 Varmkapasitetene til gasser

Entalpi er definert ved

$$H \equiv U + pV$$

I denne formuleringen er enheten til entalpi [J] og gjelder et totalt system. Spesifikk entalpi har enheten [J/kg] eller [J/mol]. Vi kommer ellers til å bruke  $H$  for spesifikk entalpi fordi vi bruker  $h$  for løftehøyde til pumper og kompressorer og høyde generelt i petroleumsteknologi. Volum  $V$  [m<sup>3</sup>] gjelder et totalt system mens  $v$  [m<sup>3</sup>/mol] er spesifikk volum. Nedenfor bruker vi kun totalsystem variablene.

Fra ideelle gassloven har vi

$$pV = RT$$

slik at

$$H = U + RT$$

Varmkapasitetene er definert ved

$$C_v \equiv \frac{dU}{dT}$$

$$C_p \equiv \frac{dH}{dT}$$

Fordi

$$dH = dU + RdT$$

kan vi skrive

$$C_p dT = C_v dT + RdT$$

og dermed har vi

$$\boxed{C_p = C_v + R}$$

Varmekapasitetene varierer med temperatur. For en ideell gass varierer de slik at differansen er konstant, den universelle gasskonstanten.

Videre kan vi skrive

$$k = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_p}{C_p - R}$$

og merker oss at  $k > 1$  for ideelle gasser.

Varmekapasitet(ene) kan uttrykkes ved empiriske ligninger av formen

$$C_p = \alpha + \beta T + \gamma T^2$$

$$\frac{C_p}{R} = A + BT + CT^2$$

eller lignende.

For reelle gasser har vi

$$pV = zRT$$

Fra ovenfor kan vi resonere oss frem til

$$k = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_p}{C_p - zR}$$

som betyr at  $k_{reelle} < k_{ideelle}$  fordi  $z < 1$  vanligvis.

## 7.7 Optimal kompresjon

Spesifikt kompressorarbeid er proporsjonalt med absolutt temperatur

$$W = RT_1 \frac{k}{k-1} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]$$

Å komprimere gass i to trinn med mellomkjøling vil redusere kompressorarbeidet

$$W = W_1 + W_2$$

Innløpt og utløp til første trinn er 1 og 2 mens innløpt og utløp til andre trinn er 2 og 3. Derivering av  $W$  med hensyn på  $p_2$  gir

$$\frac{dW}{dp_2} = RT_1 \frac{k}{k-1} \frac{k-1}{k} \frac{1}{p_1} \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}-1} - RT_2 \frac{k}{k-1} \frac{k-1}{k} \frac{p_3}{p_2^2} \left( \frac{p_3}{p_2} \right)^{\frac{k-1}{k}-1}$$

Minimum eller optimalt kompressorarbeid finner vi ved å sette

$$\frac{dW}{dp_2} = 0$$

slik at

$$T_1 \frac{1}{p_1} \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}-1} - T_2 \frac{p_3}{p_2^2} \left( \frac{p_3}{p_2} \right)^{\frac{k-1}{k}-1} = 0$$

Vi multipliserer med  $p_2$  og får

$$T_1 \frac{p_2}{p_1} \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}-1} - T_2 \frac{p_3}{p_2} \left( \frac{p_3}{p_2} \right)^{\frac{k-1}{k}-1} = 0$$

og dermed

$$T_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - T_2 \left( \frac{p_3}{p_2} \right)^{\frac{k-1}{k}} = 0$$

Hvis vi løser for  $p_2$  får vi

$$p_2 = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{k}{2(k-1)}} \sqrt{p_1 p_3}$$

Kjøling av gass mellom kompressortrinn eller enkelte kompressorer vil skje ved bruk av kjølevann eller luft i varmevekslere. På samme installasjon vil kjøletemperaturen være tilnærmet den samme. Vi setter derfor  $T_1 = T_2$  slik at

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_3}{p_2}$$

Videre må derfor følgende gjelde for flere enn totrins kompresjon

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_3}{p_2} = \frac{p_4}{p_3} = \dots = \frac{p_{N+1}}{p_N}$$

Vi konstaterer at trykkøkningen mellom hvert trinn kan uttrykkes ved ligningen

$$r = \left( \frac{p_{N+1}}{p_1} \right)^{\frac{1}{N}}$$

hvor  $N$  er antall trinn. Vi kan vise at ligningen er riktig ved å skrive følgende

$$r^1 = \frac{p_2}{p_1}$$

$$r^2 = \frac{p_3}{p_1}$$

$$r^3 = \frac{p_4}{p_1}$$

·

·

·

$$r^N = \frac{p_{N+1}}{p_1}$$

eller

$$\boxed{r = \left( \frac{p_{N+1}}{p_1} \right)^{\frac{1}{N}}}$$