PUMPING OG PUMPER: LIGNINGER

Jon Steinar Gudmundsson © 2010

5.1 Pumpearbeid og -effekt

Mekaniske strømningsligningen

$$\frac{dp}{\rho} + g\cos\alpha\, dL + u\, du + \frac{1}{2}\frac{f}{d}u^2\, dL = -dW$$

gir mekanisk energi per masse [J/kg).

Pumper brukes for innkompressible væsker. De tilfører arbeid W (arbeid har enheten energi) til væske, fra innløpstrykk p_1 til utløpstrykk p_2.

- Se bort fra høydeforskjell mellom innløp og utløp.
- Se bort fra friksjon mellom væske og pumpe.
- Se bort fra akselerasjonen mellom rør ved innløp og rør ved utløp.

Mekanisk energi over pumpe blir da

$$\frac{dp}{\rho} = -dW$$

$$-\Delta W = \frac{p_2 - p_1}{\rho}$$

Ganger pumpearbeid med masserate til å få pumpeeffekt (P=power)

$$-\Delta W\, m = (p_2 - p_1)q$$

$$\boxed{P = q \times \Delta p}$$

Virkningsgrad for pumper

$$0{,}6 < \eta < 0{,}9$$

$$P_{reell} = \frac{P_{ideell}}{\eta}$$

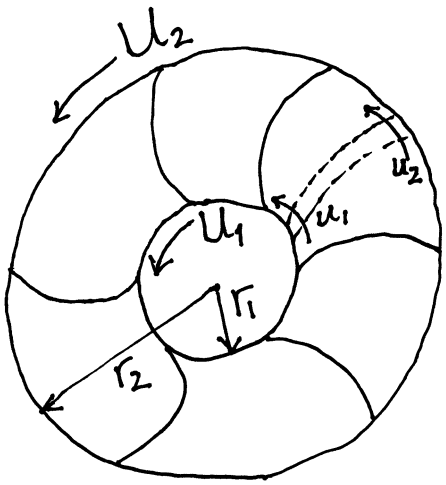
Antatt adiabatisk prosess, temperaturøkning over pumpe

$$\Delta T = \frac{P}{m \cdot C_p}$$

er vanligvis fåtalls grader.

5.2 Teoretisk løftehøyde i roterende kanaler

Fluid strømmer fra indre radius r_1 til ytre radius r_2 av løpehjulet i en sentrifugal pumpe, turbin eller kompressor. Løpehjulet har typisk flere skovler (6 i figuren nedenfor) slik fluidet strømmer i en roterende kanal. I en tenkt ideell kanal er tangenthastigheten til fluidet u_1 ved indre radius og u_2 ved ytre radius. Selve løpehjulet har hastigheter $U_1=\omega r_1$ og $U_2=\omega r_2$ som er større enn u_1 og u_2.



Konservering av lineært moment gis ved masse ganget med hastighet. Konservering av angulært moment gis ved masse ganget hastighet ganget radius. Angulært moment er også kalt moment av lineært moment. For en tenkt ideell roterende kanal er dreiemomentet (T=torque) gitt ved konserveringsligningen

$$T = q(\rho u_2 r_2 - \rho u_1 r_1)$$

hvor q er volumrate. Vi observerer at enheten til $q\rho u$ er kraft [kg.m/s^2] som gir enheten energi når ganget med radius r. Effekt er gitt ved

$$P = T\omega$$

hvor enheten til den angulære hastigheten ω er s^{-1}. Vi har for trykk og løftehøyde

$$p = \rho g h$$

slik at enheten for gh er [m^2/s^2]. Men det er samme enhet som $ur\omega$ har. Derfor kan effektligningen skrives

$$P = T\omega = q\rho g h_t$$

hvor h_t står for teoretisk løftehøyde (eng. head) som uttrykkes da som

$$h_t = \frac{(u_2 r_2 - u_1 r_1)\omega}{g}$$

Denne ligningen kalles for Eulerligningen og gjelder for roterende kanaler: Pumper, turbiner og kompressorer. Det angulære moment ved indre radius antatt liten og vanligvis satt til null. Hvis man setter inn løpehjulets hastighet uttrykkes den teoretiske løftehøyden ved

$$\boxed{h_t = \frac{u_2 r_2 \omega}{g}}$$

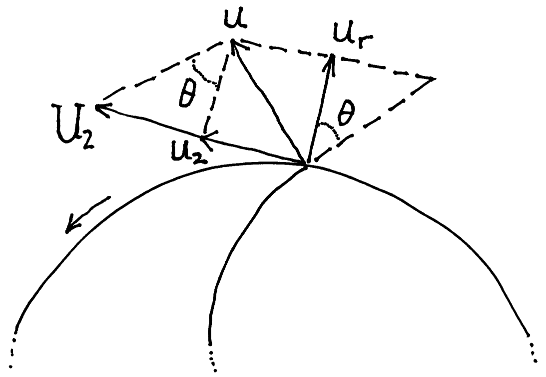
Vi ønsker å kunne relatere den teoretiske løftehøyden til volumrate. For å gjøre det lager vi et vektordiagram ved løpehjulets ytre radius, vist for én skovle med vinkel θ mellom radiell fluidhastighet u_r og løpehjulets hastighet U_2 (se figur nedenfor). Det er den radielle hastigheten som gir volumstrømmen. Vi kan skrive

$$q = u_r A$$

hvor A står for det radielle strømningsarealet

$$A = 2\pi r_2 b$$

og b for bredden til den roterende strømningskanal.



I Eulers ligning har vi fluidhastigheten u_2. Vi ønsker å kunne relatere den til den reelle fluidhastigheten u og videre til hastigheten til løpehjulet U_2. Vi ser at vinkelen θ gjelder også for trekanten dannet av vektorene u, u_2 og U_2. Fordi geometrisk tangent for en rettvinklet trekant er gitt ved forholdet av lengden til motsatt side delt på lengde til nærmeste side kan vi skrive

$$\tan\theta = \frac{U_2 - u_2}{u_r}$$

og

$$u_2 = U_2 - u_r \tan\theta$$

Vi setter inn for u_2 og u_r i Eulerligningen og får

$$h_t = \frac{u_2 U_2}{g} = \frac{U_2}{g}\left(U_2 - \frac{q}{A}\tan\theta\right)$$

og

$$\boxed{h_t = \frac{U_2}{g}\left(U_2 - \frac{q}{2\pi r b}\tan\theta\right)}$$

5.3 Skaleringslover for sentrifugalpumper og -kompressorer

Volumetrisk rate i et strømningsareal gis ved

$$q = uA$$

Hvis hastigheten er tangenthastigheten i en sentrifugal pumpe gjelder

$$q \propto N$$

hvor N er rotasjonshastigheten.

Teoretisk trykkøkning over en sentrifugal pumpe (Eulers ligning) uttrykt som løftehøyde gis ved

$$h = \frac{uU}{g}$$

hvor liten u står for fluidhastigheten og stor U for løpehjulshastigheten. Begge hastighetene er tangenthastigheter (ved ytre radius av løpehjul) som begge er direkte proporsjonal med rotasjonshastigheten slik at

$$h \propto \frac{N^2}{g}$$

Effekten til en sentrifugal pumpe gis ved produktet av volumetrisk rate og trykkøkningen.

$$P = q\Delta p$$

Basert på proporsjonalene til volumetrisk rate og trykk uttrykt som høyde væskesøle (løftehøyde), kan effekten skrives

$$P \propto N \cdot N^2 = N^3$$

For én bestemt sentrifugal pumpe gjelder følgene skaleringslover

$$q_2 = q_1 \left(\frac{N_2}{N_1} \right)$$

$$h_2 = h_1 \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2$$

$$P_2 = P_1 \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^3$$

Dermed kan vi estimere hvordan forandring i rotasjonshastighet påvirker volumetrisk rate, trykkøkning og effekt, antatt samme (konstant) virkningsgrad. Hvert punkt som skaleres må gjelde samme virkningsgrad.

Ved bruk av samme logikk som ovenfor kan vi uttrykke skaleringslovene ved bruk av diameter

$$q_2 = q_1\left(\frac{d_2}{d_1}\right)$$

$$h_2 = h_1\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2$$

$$P_2 = P_1\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^3$$

Dermed kan vi estimere hvordan forandring i diameter påvirker volumetrisk rate, trykkøkning og effekt, antatt samme geometriske design og samme (konstant) virkningsgrad.

Skaleringslovene er tilnærminger som brukes kun for estimeringer. Vi resonerer at bruken av rotasjonshastighet vil gir bedre estimat enn bruken av diameter fordi rotasjonshastighetene gjelder samme pumpe. Vi kan kombinere lovene slik at

$$q_2 = q_1\left(\frac{N_2 d_2}{N_1 d_1}\right)$$

$$h_2 = h_1\left(\frac{N_2 d_2}{N_1 d_1}\right)^2$$

$$P_2 = P_1\left(\frac{N_2 d_2}{N_1 d_1}\right)^3$$

Skaleringslovene kalles også affinitetslovene. De brukes også for sentrifugale kompressorer.

Skaleringslovene kan brukes for å definere en spesifikk hastighet for sentrifugale pumper. Forholdene

$$\frac{q}{N}\left[\frac{m^3.s^{-1}}{s^{-1}}\right]$$

og

$$\frac{gh}{N^2}\left[\frac{m.s^{-2}.m}{s^{-2}}\right]$$

kan gi et dimensjonsløst uttrykk ved å skrive

$$\frac{(q/N)^2}{(gh/N^2)^3} = \left(\frac{Nq^{1/2}}{g^{3/4}h^{3/4}}\right)^4$$

Resultatet brukes for å definere den spesifikke hastigheten

$$N_s = \frac{Nq^{1/2}}{(gh)^{3/4}}$$

Hver pumpegeometri har en bestemt konstant spesifikk hastighet. For en gitt rotasjonshastighet gir vedkommende pumpe den spesifikke hastighet relasjonen mellom volumetrisk rate og trykk (høyde væskesøyle).