

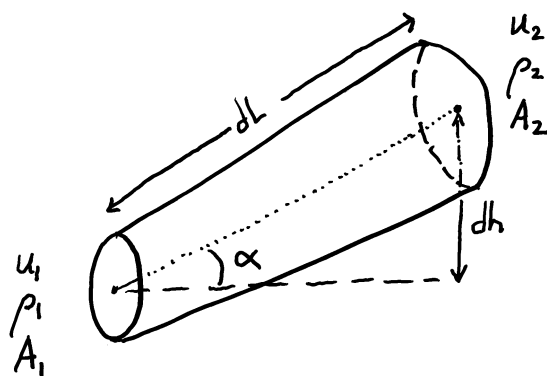
TRYKKTAP I RØRLEDNINGER: LIGNINGER

Jon Steinar Gudmundsson © 2010

- 2.1 Strømningsligninger
- 2.2 Darcy-Weisbach ligningen
- 2.3 Hagen-Poiseuille ligningen
- 2.4 Universelle hastighetsprofilen
- 2.5 Blasius-type ligninger
- 2.6 Trykktap i gassrørledninger
- 2.7 Trykktap i gassbrønner
- 2.8 Ikke-stasjonær strømning

Vedlegg 2.1 - Strømningsligninger

Bevaring av masse, moment og energi kommer til uttrykk i ligninger som beskriver stasjonær (eng. steady state) strømning av fluider. Skissen vist i figur 2.1 er et strømningsselement som kan brukes for å utlede flere strømningsligninger.



Figur 2.1 – Strømningsselement.

Bevaring av masse kan uttrykkes ved bruk av massefluks G som står for masserate per strømningsareal

$$dG = \rho_1 u_1 dA_1 = \rho_2 u_2 dA_2$$

Ved integrering får vi

$$G = \rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2$$

hvor u_1 og u_2 er gjennomsnittlige hastigheter ved innløp og utløp, henholdsvis. Ligningene ovenfor kalles for kontinuitetsligninger (continuity equations).

Hastighetene i midten av fluidstrømmen (strømningsselementet) er høyere enn snitthastigheten. I laminær strømning i rør er snitthastigheten 50 % av hastigheten i midten (fra Hagen-Poiseuille ligningen) mens i turbulent strømning i rør er snitthastigheten omtrent 80 % av hastigheten i midten (fra universelle hastighetsprofilen).

Bevaring av moment fra innløp til utløp til strømningselementet kommer til uttrykk igjennom kraftbalanse. En slik balanse må ta hensyn til forandring i trykk, hastighet og høyde. Foreløpig antar vi strømning uten veggfriksjon.

Forandring i trykk fra innløp til utløp gir følgende bidrag

$$\frac{-dp}{dL} dLdA$$

Forandring i hastighet fra innløp til utløp gir følgende bidrag

$$\rho u \frac{du}{dL} dA$$

Forandring i høyde fra innløp til utløp gir følgende bidrag

$$\frac{-dh}{dL} \rho g dLdA$$

Hydrostatisk trykk gis ved ligningen

$$p = \rho gh = \rho g \sin \alpha L$$

hvor α står for vinkel fra horisontalt. Kraft grunnet hydrostatisk trykk for strømningselementet kan derfor skrives

$$\frac{-dp}{dL} dA = -\rho g \sin \alpha dL$$

og vi noterer at

$$\sin \alpha = \frac{dh}{dL}$$

Ved summering av de tre bidragene ovenfor får vi kraftbalansen for strømningselementet

$$\rho u \frac{du}{dL} dLdA + \frac{dp}{dL} dLdA + \frac{dh}{dL} \rho g dLdA = 0$$

Vi kan omskrive slik at

$$\boxed{\rho u du + dp + \rho g dh = 0}$$

og

$$-dp = \rho u du + \rho g dh$$

Denne ligningen baseres på bevaring av masse og moment og vi kan kalle den den enkle momentligningen (inkluderer ikke trykktap grunnet veggfriksjon). Eller vi kan kalle den den friksjonsløse momentligningen. Den kan også skrives

$$u du + \frac{dp}{\rho} + g dh = 0$$

Ved deling av trykket [$\text{Pa} = \text{N/m}^2 = [\text{kg/s}^2 \cdot \text{m}]$] på tetthet [kg/m^3] blir enheten energi per masse [$\text{Nm/kg} = \text{J/kg}$].

Integrering av strømningsligningen umiddelbart ovenfor kan skrives

$$\frac{1}{2} u^2 + \int \frac{dp}{\rho} + gh = C$$

hvor C står for integreringskonstanten. For ikke-kompressible fluider ser vi at

$$\boxed{\frac{1}{2} u^2 + \frac{p}{\rho} + gh = C}$$

Denne ligningen er Bernoullis ligning. Den gjelder for strømming av ikke-kompressible fluider uten veggfriksjon.

Momentligningen ovenfor gjelder for et strømningsselement, med eller uten vegg. Darcy-Weisbach ligningen brukes for å kvantifisere trykktap grunne veggfriksjon

$$dp = \frac{f}{2} \frac{dL}{d} \rho u^2$$

Når den inkluderes i momentligningen får vi

$$\boxed{-dp = \rho u du + \rho g dh + \frac{f}{2} \frac{dL}{d} \rho u^2}$$

Denne ligningen kalles gjerne den mekaniske strømningsligningen og brukes ved beregninger av trykktap i rør, både brønner og rørledninger. Vi bør notere at ligningen brukes for både laminær og turbulent strømming antatt at den riktige friksjonsfaktoren brukes. Ligningen kan presenteres på følgende måte for det totale trykktapet

$$\Delta p = \Delta p_a + \Delta p_g + \Delta p_f$$

hvor a, g og f står for trykktap grunnet akselerasjon, gravitasjon og friksjon.

Bevaring av energi fra innløp til utløp i strømningsselementet kommer til uttrykk igjennom energibalanse. En slik balanse for strømming i rør må ta hensyn til forandring i intern energi U, tyngdeenergi gh og kinetisk energi $\frac{1}{2} \rho u^2$. Enheten er energi per masse [J/kg]. Magnetisk, elektrisk og andre energiformer inkluderes ikke. Totalt kan vi skrive

$$U + pvgh + \frac{1}{2}u^2 = 0$$

Fluider i rørledninger kan utveksle varme med omgivelsene, q [J/kg], og kan utføre arbeid, W [J/kg]. For et strømningselement med innløp 1 og utløp 2, kan vi skrive

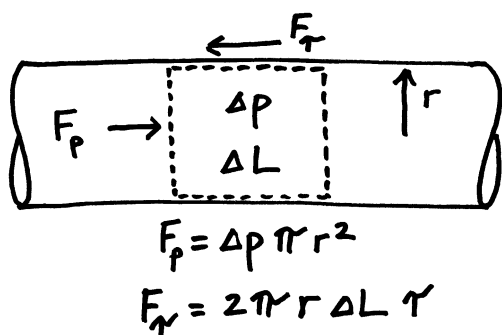
$$U_2 + gh_2 + \frac{1}{2}u_2^2 = U_1 + gh_1 + \frac{1}{2}u_1^2 + q - W$$

Arbeid kan betraktes som å bestå av to deler, arbeid relatert til utstyr (eks. pumper og kompressorer) og arbeid relatert til ekspansjon eller kompresjon av fluider

$$W = W_{\text{utstyr}} + \Delta(pv)$$

Vedlegg 2.2 - Darcy-Weisbach ligningen

For et volumelement dL langt er trykktapet dp stort. Trykktapet gjelder for strømningsarealet πr^2 mens skjerspenningen virker på veggarealet $2\pi r dL$ (omkrets ganget med lengde). Veggskjerspenningen τ_w (wall shear stress) har enheten N/m^2 .



Figur 2.2– Rørsegment.

Kraftbalansen kan skrives

$$dp \pi r^2 = 2\pi r dL \tau_w$$

slik at skjerspenningen kan uttrykkes

$$\tau_w = \frac{r}{2} \frac{dp}{dL}$$

I følge tradisjon, relateres veggskjerspenning i rør til kinetisk energi per volum med den empiriske ligningen

$$\tau_w = \frac{1}{8} f \rho u^2$$

hvor f er friksjonsfaktor. Skjerspenning og kinetisk energi per volum har den samme enheten [$N/m^2 = J/m^3$]. Ved bruk av de to uttrykkene for skjerspenning

$$\frac{r}{2} \frac{dp}{dL} = \frac{1}{8} f \rho u^2$$

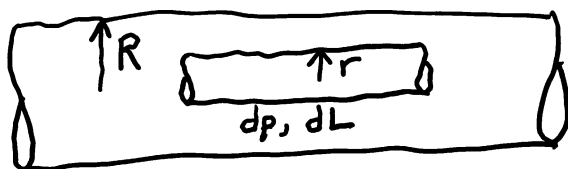
resulterer den kjente Darcy-Weisbach ligningen for trykktap i rør

$$\Delta p_f = \frac{f}{2} \frac{L}{d} \rho u^2$$

Trykktapet har fått indeksen f for å indikere friksjon og volumelementets lengde uttrykkes simpelthen med lengde L .

Vedlegg 2.3 - Hagen-Poiseuille ligningen

I laminær strømning øker friksjonsgradienten $\Delta p/\Delta L = dp/dL$ lineært med hastighet. Hagen-Poiseuille ligningen beskriver slike situasjoner ved stabile (steady state) strømningsforhold. For et sirkulært rør med radius $R (=d/2)$ kan vi skrive kraftbalanse for en et sirkulært fluidelement som vist i figure 2.3. Elementet har radius r , lengde dL og trykktap dp .



Figur 2.3 – Sirkulært fluidelement i laminær strømning.

Kraftbalansen for elementet kan skrives

$$dp\pi r^2 + 2\pi r dL \tau_\mu = 0$$

hvor τ_μ er skjærspenningen i en Newtons fluid, definert ved

$$\tau_\mu = -\mu \frac{dp}{dr}$$

Vi setter inn for skjærspenningen og omorganiserer slik at

$$du = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dL} r dr$$

Integrering for hastighet som funksjon av radius gir

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dL} \frac{1}{2} r^2 + C$$

hvor C er en integreringskonstant. Hastigheten på veggen er null ($u=0$ ved $r=R$) slik at hastigheten ellers (u mot r) uttrykkes ved

$$u = \frac{-1}{4\mu} \frac{dp}{dL} (R^2 - r^2)$$

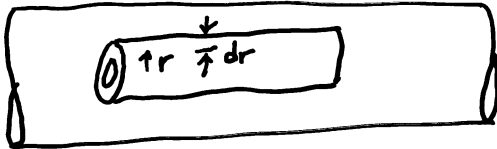
Hastigheten i midten av røret finnes ved å sette $r=0$. Denne hastigheten er maksimum hastigheten i rørets tverrsnitt

$$u_0 = \frac{-1}{4\mu} \frac{dp}{dL} R^2$$

Forholdet til hastigheten og maksimum hastigheten blir da

$$\frac{u}{u_0} = \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Vi ønsker også å finne gjennomsnittlig hastighet fra den volumetriske strømningsraten q og strømningsareal A . For det samme sirkulære røret kan vi anta et annulært fluidelement lokalisert i avstand r fra midten av røret og dr i tykkelse, som vist i figur 2.x.



Figur 2.4 – Annulært fluidelement i laminær strømning.

Strømningsraten i gjennom et slik annulært fluidelement kan skrives

$$dq = 2\pi r dr u = 2\pi r dr u_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Ved integrering kan vi finne strømningsraten

$$q = \int dq = 2\pi u_0 \left[\int_0^R r dr - \int_0^R \frac{r^3}{R^2} dr \right]$$

$$q = \frac{\pi u_0 R^2}{2}$$

$$\bar{u} = \frac{q}{A} = \frac{\pi u_0 R^2}{2\pi R^2}$$

Vi setter inn for u_0 som gir resultatet

$$\bar{u} = \frac{-d^2 dp}{32\mu dL}$$

Dette er Hagen-Poiseuille ligningen for laminær strømning i rør og rørledninger. Vi bruker diameter d som i Darcy-Weisbach ligningen. Trykkgradienten er liten for vanlige væsker som olje og vann. For tungolje med viskositet i spennet 100-10.000 mPa.s er den høyere enn vist i figur 2.x hvor viskositeten brukt er 0,5 mPa.s. Laminær strømning kan også oppstå i rørledninger som fører kjemikalier som frostvæske fra plattform til brønnramme, dette fordi frostvæske har ganske høy viskositet.

Vedlegg 2.4 - Universelle hastighetsprofilen

Vi definerer

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} = \bar{u} \sqrt{\frac{f}{8}}$$

u^*	=	friksjonshastighet
τ	=	veggskjærspenning
ρ	=	tetthet
\bar{u}	=	gjennomsnittlig hastighet (snitthastighet)
f	=	friksjonsfaktor (Darcy-Weisbach)

Definer videre

$$u^+ = \frac{u}{u^*}$$

$$y^+ = \frac{y u^* \rho}{\mu}$$

Derfor

$$\frac{du^+}{dy^+} = 1$$

Integrerer og bruker $u^+ = y^+ = 0$ som nedre grense, derfor

$$u^+ = y^+$$

Dette er ligningen for laminært sjikt (viscous sublayer) som gjelder for

$$y^+ < 5.$$

Empirisk ligning for overgangssjikt (buffer layer)

$$u^+ = 5,00 \ln y^+ - 3,0$$

som gjelder for

$$5 < y^+ < 30$$

Prandtl's ligning for turbulent sjikt (turbulent core)

$$u^+ = 2,5 \ln y^+ + 5,5$$

som gjelder for

$$y^+ > 30$$

Vedlegg 2.5 – Blasius-type ligninger

Friksjonsfaktorligninger av Blasius-type

$$f = \frac{a}{\text{Re}^n}$$

kan skrives

$$\log f = \log a - n \log \text{Re}$$

Ved bruk av Haalands ligning

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1,8 \log \left[\left(\frac{6,9}{\text{Re}} \right) + \left(\frac{k}{3,75d} \right)^{1,11} \right]$$

kan vi finne den ekvivalente Blasius-type ligning. Hvis vi antar relativ ruhet $k/d=0,001$ og Reynolds-tall 10^4 og 10^5 beregner vi $f_4=0,0322$ og $f_5=0,0219$. Vi kan skrive to ligninger med to ukjente, a og n (vi bruker \log_{10} , ikke \ln)

$$\log f_4 = \log a - n \log 10^4 = \log a - 4n$$

$$\log f_5 = \log a - n \log 10^5 = \log a - 5n$$

Derfor

$$n = \log \left(\frac{f_4}{f_5} \right) = 0,167$$

$$a = 10^{(\log f_4 + 4n)} = 0,150$$

slik at

$$f_{k/d=0,001} = \frac{0,150}{\text{Re}^{0,167}}$$

Hvis vi setter inn for Reynolds-tall 10^4 og 10^5 i denne ligningen beregner vi $f_4=0,0322$ og $f_5=0,0219$, som stemmer. For andre relative ruheter kan vi finne passende koeffisienter og eksponenter.

Vedlegg 2.6 - Trykktap i gassrørledninger

Momentligningen for stasjonær, isotermisk og endimensjonal strømning i rør og rørledninger kan skrives

$$\frac{d(\rho u^2)}{dx} = -\frac{dp}{dx} - \frac{f\rho u^2}{2d} - \rho g \sin \alpha$$

Fra differensialregning kan akselerasjonsleddet skrives

$$d(\rho u^2) = d(\rho u \cdot u) = \rho u du + u d(\rho u)$$

Siden ρu (massefluks) er konstant gjelder

$$d(\rho u^2) = \rho u du$$

og momentligningen kan skrives

$$\rho u \frac{du}{dx} = -\frac{dp}{dx} - \frac{f\rho u^2}{2d} - \rho g \sin \alpha$$

Tettheten til naturgass kan beregnes fra den ikke-ideell gass ligningen

$$\rho = \frac{pM}{zRT}$$

og

$$u = \frac{q}{A} = \frac{m}{\rho A}$$

Innsetting for ρ og ρu i momentligningen ovenfor gir

$$\frac{m}{A} \frac{du}{dx} = -\frac{dp}{dx} - \frac{fmu}{2Ad} - \frac{pM}{zRT} g \sin \alpha$$

Hastigheten kan også uttrykkes

$$u = \frac{m}{A} \frac{zRT}{pM}$$

slik at

$$du = -\frac{m}{A} \frac{zRT}{M} \frac{1}{p^2} dp$$

Videre innsetting for hastigheten gir derfor

$$-\frac{m^2 zRT}{A^2 M p^2} \frac{dp}{dx} = -\frac{dp}{dx} - \frac{fm^2}{2A^2 d} \frac{zRT}{pM} - \frac{pM}{zRT} g \sin \alpha$$

og

$$\frac{dp}{dx} - \frac{m^2 zRT}{A^2 Mp^2} \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dx} \left(1 - \frac{m^2 zRT}{A^2 Mp^2} \right) = - \frac{fm^2}{2A^2 d} \frac{zRT}{pM} - \frac{pM}{zRT} g \sin \alpha$$

Ligningen kan nå omskrives til

$$dx = \left[\frac{1 - \frac{m^2 zRT}{A^2 Mp^2}}{- \frac{fm^2 zRT}{2A^2 d \cdot pM} - \frac{pMg \sin \alpha}{zRT}} \right] dp$$

Ligningen (hovedligningen) består av alle ledd som er nødvendige for å beregne trykktap i gassrørledninger og –brønner. Det finnes en generell løsning, men den har en ikke gyldig løsning (eng. discontinuity, singularity) på grunn av deling på null for horisontal strømning. Men på differensiale formen ovenfor er ikke det et problem.

For en horisontal rørledning er $\sin \alpha = 0$ og ligningen overfor kan skrives

$$dx = \left[\frac{1 - \frac{m^2 zRT}{A^2 Mp^2}}{- \frac{fm^2 zRT}{2A^2 d \cdot pM}} \right] dp$$

For å få bedre oversikt over integreringen kan ligningen skrives

$$dx = \left[\frac{1 - \frac{a}{p^2}}{- \frac{b}{p}} \right] dp$$

eller

$$dx = \left[\frac{a}{b} \frac{1}{p} - \frac{p}{b} \right] dp$$

Integralformen kan skrives

$$\frac{a}{b} \int \frac{1}{p} dp - \frac{1}{b} \int p dp = \int dx$$

slik at

$$\frac{a}{b} \left[\ln \frac{p_2}{p_1} \right] - \frac{1}{2b} [p_2^2 - p_1^2] = L$$

hvor avstanden betegnes med L. Løsningen blir da

$$\frac{2d}{f} \left[\ln \frac{p_2}{p_1} \right] - \frac{A^2 d}{f m^2} \frac{M}{zRT} [p_2^2 - p_1^2] - L = 0$$

eller

$$\boxed{\frac{dA^2 M}{f m^2 zRT} (p_2^2 - p_1^2) - \frac{d}{f} \ln \left(\frac{p_2^2}{p_1^2} \right) + L = 0}$$

Det første leddet resulterer fra friksjon mens det andre leddet resulterer fra akselerasjon (hovedsakelig). Leddet med trykket i andre er vanligvis 10^{10} større en logaritmiske leddet i gassrørledninger. For vanlige trykktapsberegninger kan derfor tilnærmingen

$$\frac{dA^2 M}{f m^2 zRT} (p_2^2 - p_1^2) + L \cong 0$$

brukes. Vi observerer videre at det logaritmiske leddet kan skrives

$$\ln \left(\frac{p_2^2}{p_1^2} \right) = \ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{-2} = -2 \ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right)$$

Leddet med trykket i andre kan skrives

$$(p_2^2 - p_1^2) = (p_2 + p_1)(p_2 - p_1)$$

Tetthet til gass gis ved ligningen

$$\rho = \frac{pM}{zRT}$$

Gjennomsnittstetthet gis ved ligningen

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{p}M}{zRT}$$

hvor gjennomsnittstrykket er gitt ved

$$\bar{p} = \frac{p_1 + p_2}{2}$$

Med algebra kan det vises at trykktapet beregnes ved

$$\boxed{p_1 - p_2 = \frac{f}{2} \frac{L}{d} \bar{\rho} u^2}$$

som er faktisk Darcy-Weisbach ligningen, bruk for å beregne trykktap i rør som fører ikke-kompressible væsker. Innløpstrykket er p_1 (større) og utløpstrykket p_2 (mindre).

Ligningen for trykktap i et gassrør utledet ovenfor kan brukes for å sjekke ligningen for hydrostatisk trykktap, for eksempel fra innløp til utløp. For en statisk rørledning, ikke noe strømning ($m=0$), kan hovedligningen forenkles til

$$dx = \left[\frac{-1}{\frac{\rho M g \sin \alpha}{zRT}} \right] dp$$

som ved integrering gir

$$p_2 = p_1 \exp \left[\frac{-Mg \sin \alpha}{zRT} L \right]$$

Statisk trykk ved innløp er p_1 og statisk trykk ved utløp er p_2 . Vi observerer at for en rørledning som går oppover bakke er $p_2 < p_1$. For det motsatte, rørledningen som går nedover bakke er $p_2 > p_1$.

Største oppnåelig strømningshastighet i gassrørledninger (også i tofase ledninger) er lik lydshastigheten. Ligningen for trykktap i gassrørledninger kan differensieres med hensyn på utløpstrykket p_2 , dvs. d/dp_2 . Vi antar konstant innløpstrykk p_1 og konstant gasstetthet (samme som å bruke snittverdi).

$$\frac{dA^2 M}{fzRT} \left[\frac{dm^{-2}}{dp_2} (p_2^2 - p_1^2) + \frac{1}{m^2} \frac{d}{dp_2} (p_2^2 - p_1^2) \right] - \frac{d}{f} 2 \frac{d}{dp_2} \left[\ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \right] = 0$$

$$\frac{dA^2 M}{fzRT} \left[\frac{-1}{m^4} \frac{dm^2}{dp_2} (p_2^2 - p_1^2) + \frac{1}{m^2} 2p_2 \right] - \frac{d}{f} 2p_2 = 0$$

Maksimum, største oppnåelig, hastighet oppstår ved $du/dp_2=0$ som er det samme som $dm^2/dp_2=0$. Derfor

$$\frac{A^2 M}{zRT} \frac{p_2}{m^2} - \frac{1}{p_2} = 0$$

$$\left(\frac{p_2}{m} \right)^2 = \frac{zRT}{A^2 M}$$

Fordi $m = \rho \cdot A \cdot u$ kan vi skrive

$$u = \frac{p_2}{\rho} \sqrt{\frac{M}{zRT}}$$

og fordi $\rho = pM/(zRT)$ kommer vi frem til

$$u = \frac{p_2}{\rho} \sqrt{\frac{\rho}{p_2}}$$

$$u_{maks} = \sqrt{\frac{p_2}{\rho}}$$

Resultatet viser at den største oppnåelige strømningshastighet, u_{maks} , er lik lydhastigheten til gass. Vi observerer at kompressibiliteten til gass ved lavt trykk $K=1/p$. Videre at i tilfeller hvor strømningshastigheten kommer i nærheten av lydhastigheten vil trykkfallet være så stort at utløpstrykket er lavt.

Vedlegg 2.7 – Trykktap i gassbrønner

Momentligningen for stasjonær, isotermisk og endimensjonal strømning i rørledninger og brønner kan skrives

$$\rho u \frac{du}{dx} = -\frac{dp}{dx} - \frac{f\rho u^2}{2d} - \rho g \sin \alpha$$

Tettheten og snitthastigheten kan uttrykkes

$$\rho = \frac{pM}{zRT}$$

$$u = \frac{m}{\rho A}$$

Når vi setter inn for ρ og ρu får vi

$$\frac{m}{A} \frac{du}{dx} = -\frac{dp}{dx} - \frac{fmu}{2Ad} - \frac{pM}{zRT} g \sin \alpha$$

I gassbrønner er det hovedsakelig hydrostatisk trykk og trykktap grunnet veggfriksjon som dominerer. Trykktap grunne akselerasjon vil være neglisjerbart (ingen stor forandring i diameter). Trykktap grunnet akselerasjon i horisontale gassrørledninger vises også å være ubetydelig sammenlignet med trykktap grunnet friksjon. Vi tar derfor ikke hensyn til akselerasjon og skriver

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{fmu}{2Ad} - \frac{pM}{zRT} g \sin \alpha$$

Vi definerer

$$a_1 = \frac{M}{zRT}$$

$$b_1 = \frac{fm^2}{2A^2d}$$

slik at

$$\rho = a_1 p$$

og

$$u = \frac{m}{a_1 p A}$$

Trykktapsligningen kan derfor skrives

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{b_1}{a_1} \frac{1}{p} - (a_1 g \sin \alpha) p$$

og

$$p dp = -\left[\frac{b_1}{a_1} + (a_1 g \sin \alpha) p^2 \right] dx$$

For videre forenkling ved bruk av to nye variabler, a_2 og b_2 , skriver vi

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{p}{(a_2 + b_2 p^2)} dp = -\int_0^L dx$$

Integrering gir

$$\left[\frac{1}{2b_2} \ln(a_2 + b_2 p^2) \right]_{p_1}^{p_2} = -L$$

$$\frac{1}{2b_2} [\ln(a_2 + b_2 p_2^2) - \ln(a_2 + b_2 p_1^2)] = -L$$

$$\ln \left[\frac{a_2 + b_2 p_2^2}{a_2 + b_2 p_1^2} \right] = -2b_2 L$$

$$\left[\frac{a_2 + b_2 p_2^2}{a_2 + b_2 p_1^2} \right] = \exp(-2b_2 L)$$

$$b_2 p_2^2 = (a_2 + b_2 p_1^2) \exp(-2b_2 L) - a_2$$

$$p_2^2 = \frac{a_2}{b_2} \exp(-2b_2 L) + p_1^2 \exp(-2b_2 L) - \frac{a_2}{b_2}$$

$$p_2^2 = p_1^2 \exp(-2b_2 L) - \frac{a_2}{b_2} [1 - \exp(-2b_2 L)]$$

Parametrene er

$$b_2 = a_1 g \sin \alpha$$

$$a_2 = \frac{b_1}{a_1}$$

Hvis vi bruker parametrene uten indeks kan vi generalisere og skrive ligningen

$$p_2^2 = p_1^2 \exp(-2ag \sin \alpha L) - \frac{b}{a^2 g \sin \alpha} [1 - \exp(-2ag \sin \alpha L)]$$

hvor

$$a = \frac{M}{zRT}$$

$$b = \frac{fm^2}{2A^2d}$$

Første leddet til høyere uttrykker hydrostatisk trykktap mens andre leddet uttrykker trykktap grunnet friksjon. Trykktap grunnet akselerasjon er ikke tatt med fordi det er neglisjerbart, som fortalt ovenfor. Parameter a inneholder gassegenskaper mens parameter b inneholder veggfriksjon.

Hvis vi antar en statisk brønn (ingen strømning slik $m=0$) har vi

$$p_2^2 = p_1^2 \exp(-2ag \sin \alpha L)$$

og dermed

$$p_2 = p_1 \exp(-ag \sin \alpha L)$$

som er trykk med dyp i en gassbrønn. Vi noterer at for en vertikal brønn er $\sin(-90)=-1$. Også, at p_1 er brønnhodetrykk og p_2 er trykk på dyp L i gassbrønnen.

2.8 Ikke-stasjonær strømning

Bevaring av masse og moment i ikke-stasjonær (eng. unsteady) strømning i rørledninger kan henholdsvis uttrykkes ved de to ligningene

$$K \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - g \sin \alpha + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{f}{2} |u| u = 0$$

Vi har to partielle differensielle ligninger med to ukjente $p(x,t)$ og $u(x,t)$. Ligningene er standard og finnes i lærebøker. Vi ønsker å bruke ligningene for å beskrive bevegelse av trykkbølger i rørledninger samt utlede Joukowski ligningen (vannhammerligningen).

Det kan vises at andregradsleddene (eng. second order term) er mye mindre enn førstegradsleddene. I ligningen basert på massebevarelse har vi to ledd som multipliseres med kompressibiliteten K . Hvis vi bruker uttrykket

$$a = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

for lydhastighet kan vi skrive tilnærmingen

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} \right) \approx \left(a \frac{\Delta p}{\Delta x} + u \frac{\Delta p}{\Delta x} \right)$$

Fordi $a \gg u$ kan vi eliminere andregradsleddet.

I ligningen basert på momentbevarelse kan vi gjennomføre lignende analyse hvor

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \approx a \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Igen, fordi $a \gg u$ kan vi eliminere andregradsleddet. Og hvis vi velger å ikke ta hensyn til hydrostatisk trykk og ikke heller til trykktap grunnet veggfriksjon, får vi ligningene

$$K \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

Vi skal bruke disse to ligninger for å utlede Joukowski ligningen og for å utlede bølgeligningen.

Joukowski ligningen. Vi kan skrive tilnærmingene

$$K \frac{\Delta p}{\Delta t} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \approx 0$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} + \frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{\Delta x} \approx 0$$

Fra massebevaringsligningen får vi

$$\Delta p = \frac{-1}{K} \Delta u \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

og fra momentbevaringsligningen

$$\Delta p = -\rho \Delta u \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

slik at

$$\frac{1}{\rho K} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right)^2 = a^2$$

fordi den isotermiske lydshastigheten i væsker gis ved ligningen

$$a = \sqrt{\frac{1}{\rho K}}$$

Vi setter inn og kommer frem til

$$\Delta p = \rho a \Delta u$$

som er vannhammerligningen, også kalt Joukowski ligningen. Den beskriver trykkøkningen når vi stenger (eller åpner) ventiler i rørledninger. Ligningen kan også skrives

$$\Delta p = \frac{\Delta u}{aK}$$

Bølgeligningen. Partiell differensiering av den første ligningen med hensyn på tid og den andre ligningen med hensyn på avstand, samt å trekke resultatet for den andre ligningen fra resultatet for den første ligningen, gir følgende ligning

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho K} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$$

Dette er bølgeligningen for trykk som funksjon av avstand og tid.

Partiell differensiering av den andre ligningen med hensyn på tid og den første ligningen med hensyn på avstand, samt å trekke resultatet for den andre ligningen fra resultatet for den første ligningen, gir følgende ligning

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{K}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Dette er bølgeligningen for strømningshastighet som funksjon av avstand og tid.

Vi setter inn lyd hastigheten og kommer dermed frem til bølgeligningene henholdsvis for trykk og hastighet

$$\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

eller

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0}$$